### 月球质量的测定

### Wolfking

 与地球质量的测量相比，月球质量的确定要困难许多。

 我们知道地球的质量通过牛顿的万有引力定律可以相对容易的测定。牛顿定律告诉我们，两个物体之间的引力*F*与他们各自的质量*m*和*M*成正比，而与他们之间的距离*r*成平方反比，写成数学公式就是

这个公式里面的*G*被称为万有引力常数，它可以通过类似卡文迪许所用的方式在实验室里测定。另一方面，牛顿第二定律告诉我们物体所受外力等于质量跟加速度的乘积。如果把质量为*m*的自由落体在地面的加速度记为*g*，那么在上面公式中两边除以*m*就可以得出

从而有

所以只要测出重力加速度*g*和地球半径*r*，地球质量*M*也就确定了。加速度*g*的测量很容易在实验室里完成，而地球半径在二千多年前的古希腊时代 (埃拉托色尼 Eratosthenes) 就已经有了不错的估计。因此地球质量的确定并不算困难。

那么是不是月球质量也可以类似地测定呢？从地球上我们可以相对容易的确定月球的大小和地月之间的距离（视差法，月食法等等，同样古希腊人已经有了大致的估计），月球绕地球转动的周期就更不用说了。有了这些，我们就可以计算月球在地球引力下的加速度。可惜的是，从前面的公式我们可以看到，一个物体绕地球旋转（这也是自由落体）的加速度只取决于地球的质量和轨道高度，却跟物体的质量没关系。既然公式里不出现月球质量，也就没法用这个公式去求它的值。

 到了现在的宇航时代，我们当然可以发射一个环月卫星，然后用轨道周期和高度来计算月球质量（目前最精确的月球质量数据就是这样得到的）。那么在人类有登月能力以前是不是就没法测量月球质量了呢？当然不是，天文学家早就有了相对精确的月球质量数据。

1. 牛顿的潮水法

假如我说，第一次用来测量月球质量的工具是一根插在泥水中的木杆，你会相信吗？

无论是用什么工具什么方法，天体质量的计算必然要用到引力理论（这里我撒了个小谎，因为可以假设月球密度跟地球类似而对质量做估计，当然会有不小的误差），所以大家完全可以猜到第一个估计月球质量的正是我们的牛顿爵士。而他使用的工具就是上面提到的木杆（虽然不是他亲自动的手），当然还有他在数学和物理上的无与伦比的才华。

 牛顿意识到，我们在海边每天经历的潮水是月球和太阳的引力共同造成的。以月球为例，在地球靠近月球的一头的海水受到的月球引力要大于远离月球那头受到的引力。这种引力差造成海水向地球上的近月点和远月点两头鼓起，使得大部分沿海地区每天经历两次高潮（月球在天顶或对跖点）和两次低潮（月球跟人的位置关于地心成90度角时）。太阳的引力差对地球也有类似的效果，但没有月球的明显，所以只表现为对月球引起的潮水高度的影响。

 这种由于引力差造成的沿引力源方向拉伸的效果被称为起潮力（tidal force）。利用牛顿万有引力定律，不难算出起潮力跟引力源（太阳或月亮）的质量成正比，而跟引力源到地球的距离的立方成反比。

因为地月日相互位置的不同，同一个地方高潮时的潮水高度会按一个月的周期变动。每个月中有四天尤其值得注意。在满月或新月时，地，月，日成三点一线，太阳与月球的起潮力叠加，出现所谓的大潮（spring tide，这里的spring是“跳跃”的意思，不能误译为“春潮”）；在上弦和下弦时，地月连线和地日连线成90度角，太阳和月球起潮力互相抵消，出现小潮（neap tide）。

牛顿认为高潮时的水面高度跟起潮力的大小是线性关系。他把月球和太阳的起潮力分别记为*L*和*S*（*L*跟*S*是拉丁文月亮（Luna）跟太阳（Sol）的字头），那么大潮（起潮力叠加）时高潮的高度跟小潮（起潮力相消）时高潮的高度之比就应该是 。所以通过观测大潮和小潮时的潮水高度就可以算出 从而计算出。因为地球到太阳和月球的距离都已知，就可以算出太阳和月球的质量比。而太阳的质量是可以用地球和其它行星的轨道半径和周期计算的，所以这就相当于算出了月球的质量。

牛顿查阅了1668年布里斯托附近埃文（Avon）河口的潮水资料，得出大潮与小潮的高度比为9/5。由此他本应算出 ，但是牛顿因为其它原因对这个数字做了一些（不必要的）矫正，最后得出一个 的比例。这跟现代的 *L=*2.2 *S* 的数字相比差了两倍以上。从这个错误的比例，牛顿得出地球跟月球的质量比为39.788比1（正确的数字接近81比1）。虽然结果有巨大的误差，牛顿仍然可以说是第一个拿木杆称月球的人。
2. 和稀泥的拉普拉斯和潮水法的没落

牛顿用潮水法算出的地月质量比有很大的误差，其中有两个主要原因：一是潮水数据本身的粗糙，二是牛顿所用的太阳质量有不小的误差。后者随着观测技术的提高可以想法消除，前一个潮水数据的误差则有内在的因素，并不是靠观测手段的改变就能解决问题的，所以潮水法被其他更精确的方法代替可以说是必然的。但潮水法有着简易可行的优点，所以在其他更复杂的方法和更精密的仪器出现前仍然有它的用武之地。

牛顿之后的几十年内都没有人能对他的数字作出改进，直到一个法国人的出现，此人的名字叫皮埃尔-西蒙·拉普拉斯。拉普拉斯继承了牛顿的潮水法（事实上拉普拉斯对潮汐的研究远远超过测量月球质量这种小应用，他是大洋潮汐动力学的鼻祖，所建立的拉普拉斯潮汐方程到今天仍然是研究大洋潮汐的基本方程），但与牛顿不同的是他对统计学的认识和牛顿不可同日而语。牛顿对统计误差的缺乏认识从他能用粗糙的潮水数据（话说他的太阳质量数据也不见得有多精确）能算出5位有效数字就可以看出来，这简直就像是你站在东方明珠前面用手比了比就给出一个精确到毫米的高度值一样。

而拉普拉斯他老人家可以说是概率论和统计学的奠基人之一，所以显然不会犯这样的错误。他选择了（主要是法国布雷斯特（Brest））每年两至两分点 (冬夏至和春秋分) 这四天附近的潮水数据，并且不断搜集更多的资料。开始他使用十八世纪的短期资料，得出地月质量比为59，在1797年又修正为58.7。到1825年时他得到了长期的水文资料，得到了75的质量比，这跟81已经很接近了。

当然，拉普拉斯不仅是潮汐动力学的鼻祖，更是天体力学的巨匠。他又使用了视差法（parallax）和地球自转轴的章动（nutation）对月球质量作了估计（这些方法我会在以后具体讨论），分别得到了69.2，71.0，74.2的数值。这些数字当然不会都对，于是拉普拉斯决定和稀泥，他把潮水法得到的数字跟这三个一视同仁，放在一起取了个简单平均，得出了68.5的比值（这个数字发表在1802年出版的巨著《天体力学》的第三卷，当时他还没有用潮水法得出75的值）。

与他们的法国同行相比，英国天文学家迟迟没有在这方面做出进展。直到十九世纪初，大家终于开始觉得牛顿的39.788的数字颇为可疑。到了1867年，芬雷逊（Finlayson）用多佛(Dover) 1861，1864，1865，1866的大小潮资料算出了89.870，88.243，87.943，86.000的数据。1874年美国人费雷尔（W.E. Ferrel）继承拉普拉斯的传统，利用布雷斯特从1812到1830年间19年的潮水数据得出了78的地月质量比，已经非常逼近81的值了。1891年出生于苏格兰的美国人哈克奈斯（W. Harkness）用潮水法得出了78.65的数值。

潮水法有着先天的缺陷。潮汐的运动受到地球自转，海洋深度，海边地形，当地气候等等诸多因素的影响，不可能达到太大的精度。随着望远镜制作技术的提高和天体力学的进步，它注定会被其它方法渐渐取代。

但是到了1913年，有一个大大有名的美国人又把潮水法复活了，此人的名字叫阿尔伯特·迈克尔逊（没错，就是测定光速的那个 Albert Michelson）。迈克尔逊是实验专家，他的想法很简单，潮汐不是受到地形，天气等等实际因素影响吗？那我在实验室里做总可以了吧？这当然要求异常巧妙的实验设计和极高的实验精度，两样都不曾吓倒过迈克尔逊。

迈克尔逊的实验工具是一根水平放置的铸铁管，管子里放满一半水，两头用玻璃封住，装上显微镜来观察水面高度变化。跟6年前的迈克尔逊-莫雷实验类似地，他还把管子旋转各种角度来测量不同方向上的引力变化。尽管起潮力引起的水面高度变化不到千分之一英寸，迈克尔逊还是把实验误差控制到了百分之一以内。

可惜的是迈克尔逊实验虽然达到了很高的精度，但是因为他忽略了地球本身的形变，得到的地月质量比还是跟实际值有30%的误差。

这大概是潮水法最后的昙花一现。更加精确的月球质量基本上都是月球运动学的结果，以下我们会继续介绍。
3. 开普勒第三定律和看上去很美好的钟摆法

对地月系统使用开普勒第三定律来计算质量的方法叫做钟摆法（pendulum method，月球绕地球的周期运动可以类比钟摆的往复运动）。前面我们说过，仅用牛顿第二定律是不足以确定月球质量的，所以在这里我们不仅要用牛顿第二定律，还要加上开普勒第三定律。在对地月系统综合使用这两大定律后，我们可以得到下面的方程：

其中， 分别是月球和地球的质量， 是圆周率， 是地月之间的平均距离，是地球表面的重力加速度， 是地球半径， 是月球绕地球的公转周期。方程左边正是我们想求的地月质量比。

 看上去钟摆法的右边都可以测量，推导也不困难，而英国天文学家艾利（George B. Airy）的确在1845年发表过用钟摆法测出的地月质量比，那么为什么粗糙的潮水法在十九世纪仍然大行其道呢？

有时候理想很丰满，现实却不幸很骨感。钟摆法的问题主要不在于方程右边的测量值，而在于方程的左边，我们来稍微仔细分析看看。

我们知道地月质量比大致在81左右，所以方程左边约等于1.01234。假如我们的观测比较精确的话，右边代入各个观测值后大致也会得到接近1.01的数值。现在想象我们辛辛苦苦地做观测，把整个右边的精确度控制到1%（这并不容易，因为右边精度百分比是每一项精度之和，而带立方及平方的项在估计精度百分比时要分别乘以3和2，这大致相当于要把距离，半径，重力加速度和周期的精度分别控制到千分之一），就是说我们算出来右边的值在 。这意味着我们得到的地月质量比可以从跑到! 那我还是拿根木杆蹲海边去测潮水高度算了！

所以从这里我们可以看到，如果使用钟摆法，要想让质量比的精度达到1%，我们的单项观测精度必须达到十万分之一左右！这实在是有点令人沮丧，也是它为什么无人问津的原因。

1. 视差法和两位爱神

什么是视差（parallax）？视差是由于观察者位置的移动而造成的近处被观测物体相对更远处的背景移动的现象。如果你尽量伸长手臂然后分别用你的左眼和右眼看你的大拇指，你就会看到它相对房间的墙壁等等背景似乎移动了，这个效果就叫做视差。

OK，你会说这也许很cute，但是这个所谓的“视差”有什么用呢？事实上它很有用。比如说，在军事上一个射手在缺乏工具时甚至可以用这个办法来估算到目标的距离。以我自己为例，我的两眼的瞳距大致是7.5厘米（这个距离叫做基线（baseline）），我手臂伸直后到眼睛到拇指的距离大致是60厘米。如果我的左右眼观测拇指在远处的位移是7.5米（这可以利用树木，车辆等物体来估算），那么利用相似三角形各边等比例的原理，我到远处目标的距离就差不多是60米。

天文学中应用视差法测距离时，往往不能知道远处背景的距离，所以通常直接测出被测天体相对于基线的张角（这个张角也叫做parallax），然后利用三角学和基线的长度来算出天体的距离。

为什么视差法可以用来测月球质量？一个重要原因是月球相对地球的“大”质量。读到这里肯定有人要大喊：“可是月球质量还不到地球的八十分之一！”。没错，我们知道地月质量比只有81。可是如果你看看太阳系其它行星的卫星，就可以知道月球之“大”了。比如火卫一的半径才11公里，火卫二是6公里；土星最大的卫星土卫六（Titan）的质量倒是有月球质量的将近两倍，可惜土星质量是地球的95倍；木卫三是太阳系中最大的卫星，但是质量也只比月球大两倍多一点点，而木星质量超过地球的300倍！至于金星维纳斯……跟她提卫星她会哭的。

那么月球的大质量跟视差有什么关系呢？我们知道，地月系统其实是围绕它们共同的质心转动的，月球的大质量使得它们的质心离地心距离相对比较远（超过4600公里，当然仍然在地球内部），所以每个月地心绕着这个质心在东西方向上有9000公里以上的摆动。与此相应地，离我们较近的天体（比如太阳和其它行星）会在远处的恒星背景上也有个以一个月为周期的东西向的摆动，这个摆动的角度大小就是该天体的“视差”。以太阳为例，这个视差是6”.3（6.3弧秒）。如果我们知道日地平均距离（以下记为），就可以计算地心到地月质心的平均距离（记为），因为我们有，这里tan表示正切。

有了这个平均距离，如果我们还知道地月平均距离，根据质心的定义我们就可以求出地月质量比：

上面的方程通常称为“月球方程”（lunar equation）。好了到这里我们回头来看看这个方法会遇到什么困难。我们可以用视差法或月食法来相对精确地估算地月距离，所以我们面临的任务是如何比较精确地计算1.日地距离；2. 前述的6.3弧秒的视差。

现实再次展示了它残酷的一面。为了说明6.3弧秒这个角度有多小，我们来计算一下太阳东升西落的速度（也就是地球自转的角速度）：为简单计假设太阳一天转360度，那么每秒就转过360/24/3600 度 = 360/24 弧秒 = 15弧秒（1度等于3600弧秒），就是说太阳每半秒钟转过的角度就大于6.3弧秒！所以尽管有月球的“大”质量帮忙，要精确测量这个角度仍然极其困难。

同样，如何测量日地距离也是观测天文学永恒的话题。为了解决这两个问题，天文学家不得不请出两位爱神：维纳斯和丘比特。

1. 太阳视差与小行星Eros

在第4节我们已经提到直接测量太阳视差非常困难，因为角度实在太小了。于是我们不得不使用稍微间接的办法。其中一个办法就是通过精确测量某个绕太阳公转的天体的轨道来计算这个视差。

为什么可以这样做呢？日地平均距离通常被叫做一个天文单位（Astronomical Unit，简称AU）。通过开普勒三定律，我们可以测出绕日公转天体的各个固定参数，从而精确计算任何时间点上该天体在太阳系中的位置。当然要注意的是，这个位置里面含有一个未确定的参量，那就是前述的天文单位AU。比方说我们可以测出该天体轨道长轴是几个AU，近日点又是零点几个AU，等等，甚至可以精确计算出某时间点该天体离地球的距离是几个AU。那么好了，只要我们找个会在某个时间点离地球很近的天体，然后具体测出该天体离地球的公里数，不就可以计算出AU了吗？有了AU，计算视差完全不是问题。

那么哪个绕日公转的天体会在某时间离地球非常近呢？而且最好这个天体又比较小，看上去像个点，测量角度就比较精确。满足这些条件的最理想天体，就是编号为433的小行星Eros（依洛斯）。Eros是希腊神话的小爱神（罗马神话对应的就是丘比特），所以中文也管433号小行星叫爱神星（顺便提下Eros上有两个陨石坑分别叫“宝玉”和“黛玉”）。Eros是小行星中比较少见的Mars crosser，就是轨道偏心率相对较大，以至于会跑到火星轨道以内来，从而离地球很近的那种小行星。

自从1898年Eros被德国的Gustav Witt博士发现后，每次Eros接近地球（天文学上称为“冲日”，英文叫 opposition ，就是Eros，地球，太阳三点一线，地球在中间位置，类似月球的满月）都可以说是测量太阳视差的机会。由于Eros轨道的特殊性，每过三十年左右Eros跟地球距离会特别小，被认为是测量视差绝佳的机会，国际天文学界往往会组织专门的测量活动。

这种测量活动规模最大的一次发生在1930-1931年，这一次爱神星Eros离地球最近距离才2600万公里左右。国际天文联合会（International Astronomical Union）为了这次观测，在1928年全体大会上通过成立了一个“太阳视差委员会”（Solar Parallax Commission），由英国皇家天文学家Harold Spencer Jones爵士领衔。为了以前所未有的精度测定Eros的距离，委员会首先组织了九个国家的十四个天文台重新测定了Eros路径上821颗恒星的位置。可惜的是，在1930年秋天首次对Eros做测量后，天文学家们马上发现 Witt 博士在1925年计算的Eros轨道有问题，821颗恒星中有许多用不上！于是柏林的August Kopff教授重新标定了87颗恒星再做测量。（据说Witt的计算错误是因为有个数字从前一页抄到下一页时抄错了！）

另外，为了使用大口径望远镜对Eros进行长期观察，还需要许多亮度很小的恒星做参照物。于是在前面的904颗恒星基础上，4个天文台又测定了另外5823颗恒星的位置！最后所有恒星的位置都被保存到格林威治的皇家天文台（皇家天文学家也是格林威治天文台的台长）。从1930年10月开始，真正的Eros观测开始了。到1931年5月为止，14个国家的24个天文台一共拍摄了2847块照相底板。这些底板以及由此计算的爱神星位置，拍照的准确时间，以及其他相关数据最后都集中到格林威治。在琼斯博士的指导下，天文学家们以三种不同方式计算了太阳视差。综合三种方法后最终采用的太阳视差为 8”790（8.790 弧秒）。

如果大家还记得第4节的月球方程，里面提到的太阳视差是 6”3。为什么跟这次测得的数值完全不同呢？这里要说明下，第4节的太阳视差的基线是地月系统的质心跟地心的距离，而本节中太阳视差的基线是地球赤道半径。因为地月系统质心在地球内部，所以该质心跟地心连线对太阳的张角当然要小于地球半径对太阳的张角。

有了8”790的值，太阳视差委员会得出一个天文单位约等于149,673,000 公里。这跟现在的149,597,870 公里已经很接近了（误差只有万分之五）。

太阳视差委员会不仅测定了天文单位，而且也顺便测得了地月系统质心到地心的距离。道理其实很简单，跟第4节的月球方程完全类似。地月质心在一个月中会有东西摆动，而由此爱神星也会在恒星背景上摆动。当然这里事情由于爱神星本身的运动而复杂化，需要对观测数据按爱神星轨道速度进行修正。但是这无非是增大计算量，而没有观测上的本质困难，因为Eros跟地球距离最近时才是地月距离几十倍，引起的视差非常明显。最终通过观测，得出第4节的太阳视差（就是月球方程中那个）为 弧秒（Jones爵士的数值显然略偏高），代回月球方程就可以算得地月质量比 。相应的这个数字略小于现在的精确值 81.35。
2. 太阳视差与金星凌日

这节我们介绍另外一个测定天文单位AU的方法，就是利用金星维纳斯的凌日（transit of Venus）。凌日其实就是金星正好跑到了地球跟太阳之间，使得金星挡住了很小一部分太阳（看上去像太阳表面一个黑点）。天文爱好者们多半还记得2004跟2012年的金星凌日。相比爱神星冲日，金星凌日是一种更加罕见（下次凌日要2117年！），也更加壮观的天文现象，人类发现它的历史也更加悠久而丰富多彩。有时间的话我可以另写一篇专门讲讲历次观测金星凌日的传奇甚至是悲壮的历史（比如1769凌日的一个法西联合观测队因为在下加利福尼亚的瘟疫环境中坚持观测，全队28人仅9人幸存 —— 但是他们仍然完成了任务）。

历史上第一个预测金星凌日的人毫不意外地是开普勒，他对第谷（Tycho Brahe）星表的研究不光产生了行星运动三定律，也得出了金星的运行规律。不过第一个找到利用金星凌日计算天文单位的有效办法的，却是另一位大名鼎鼎的天文学家埃德蒙·哈雷 (Edmond Halley；也许大家只是从哈雷彗星知道他的名字，但其实他是个精通天文，地理，数学和物理的全才，也是英国第二任皇家天文学家)。我们来看看金星凌日为什么可以用来计算日地距离，有哪些困难，以及哈雷天才的解决方案。

首先根据开普勒第三定律，行星轨道周期的平方跟轨道半长轴的立方成正比。因为各个行星的轨道周期可以非常精确的测定，我们很容易就知道了各个行星之间的轨道半径比。比如金星公转一圈是0.62个地球年，那么金星的平均轨道半径就是0.62平方的三次方根，也就是0.72AU。

现在假设我们在地球上P，P' 两点（最好是分别位于赤道南北两侧）观测金星凌日，那么从这两个点的角度来看金星就会在太阳表面走过两条几乎平行的路线A-B和A'-B' (见图)



两条路径跟金星（用V表示）以及地球上观测点P，P'之间的关系见下图



显然如果我们能测得两条路径之间的距离D（其实是D对地球上某点所张的夹角或者说视差），就可以用地球上P，P' 两点间距离和三角学来计算地球到金星的距离，从而得到日地平均距离AU。

看到这里想必大家也能猜到这个方法的缺陷，那就是D是个非常小的距离（从金星到太阳距离约等于70%AU可以估计出D大概是P跟P'距离的 7/3 倍），所以想从地球上去准确测定这个视差不比测量太阳视差容易。那么哈雷是怎么克服这个困难的呢？

哈雷的天才想法的关键点之一是注意到了这么一个事实，那就是：太阳是圆的！大家也许觉得好笑，难道有谁觉得太阳是方的吗？你还别说，如果太阳是方的，我们就会对如何测量D束手无策，因为那样AB跟A'B'的长度就会完全相等。但是幸好太阳是圆的，所以AB对应的圆心角（可以直接测量）以及两条路径的长度差（不那么好测量）决定了两条路径之间的距离D！

而哈雷的计算方法关键点之二，就是意识到了我们不需要直接测量路径的长度差，我们只需要测量金星走过这两条路径的时间差！因为不管在地球上哪点看，金星走过太阳圆盘的速度基本一样，所以时间差也就是长度差（事实上D最终可以表达为时间差和走过某条路径所用时间的比率再乘以路径对应的圆心角的一些三角函数）。金星凌日的全过程一般有6个多小时，两条不同路径的时间差也往往有好几分钟。而如果有好的钟表，即使在哈雷的时代（17世纪）计时也可以精确到秒。也就是说我们有可能做到误差只有千分之几甚至更小（只要P跟P'的距离足够大）。

哈雷很年轻的时候就发现了上面的方法，但是他一直到1691年才在一篇论文上提到这个“掐表法”，在1716年才发表了更加详细的计算过程。当然这对天文学界也谈不上什么大损失，因为上一次的金星凌日发生在1639年（开普勒预测的那次是1631年），那时候哈雷还没出生。而下一次要1761年，哈雷预计自己是活不到那个时候了（他出生于1656年）。但是他敦促天文学界不要浪费这百载难逢的机会（金星凌日是一对一对来的，每一对相隔8年，但是两对之间相隔105.5年或者121.5年）。

于是在1761跟1769凌日到来的时候，科学界第一次全球范围的合作出现了。200多名天文学家被不同的科学团体派往世界各地去掐表观测金星凌日的持续时间。他们要对付的困难包括自然灾害，疫病，战争，处于蒙昧状态的土著，以及跟现代相比依然非常落后的航海术等等。几乎每一个观测队的经历记录下来都像一本小说（比如悲催的法国天文学家Le Gentil，他在1761年出发时正值英法七年战争，好不容易赶到目的地却发现已经被英国人占领，凌日当天他只能漂浮海上无法观测；1769年终于法国人打了回来，可是凌日当天乌云密布，还是没能观测成，而这还只是不幸的开始！等他克服了疫病和迷航在1771年回到法国，发现因为漂泊海外10年，别人都以为他死在路上，他在科学院的职位已经被人替补，老婆已经改嫁，财产已经被亲戚瓜分并且花光了！最终靠国王的敕令才挽回一些损失。）。

但是最终他们成功了。剑桥大学的天文学教授荷恩斯比（Thomas Hornsby) 最后给出的日地距离是 93,726,900 英里，大致等于150,838,500 公里，跟现在的 149,597,870 相比精确到了99.2%。这在许多国家的地图都还画不出来的时代无疑是了不起的成就!

1. 岁差与章动

这节的内容会牵涉到一些相对复杂的概念。我会尽量用语言来讲清楚这些概念而少用数学公式。

岁差，物理学中也叫“进动”（precession），是指天体（当然我们这里只关心地球）自转轴因为其他天体引力的影响而产生的指向上的连续变化。习惯上岁差一般是指自转轴长期稳定的变化，比如地球就有一个26,000年为周期的岁差，每26,000年自转轴会划出一个圆锥。其他短期变化往往有不同名词来描述，其中的一个就是“章动”，英文叫 nutation 。地球自转轴在缓慢绕圈的同时，还会有相对快速的南北方向（也就是经线方向）上的摆动或者说“点头”的动作，这种摆动就叫做“章动”。因为章动，自转轴划出的不是一个圆，而是一个带波纹的圆。



上图中，绿色的*R*箭头代表的是地球的自转，蓝色的*P*代表的是自转轴进动（岁差），红色的*N*代表的是章动，是在进动基础上的小幅度摆动。

岁差和章动精确数值的计算都很复杂，原因是理论上太阳系内所有天体都对地球的运动状态有贡献，所以方程是个没有精确解的N体问题。为了处理这样的问题，我们往往使用摄动法（也叫微扰理论，perturbation theory），就是分清主要矛盾跟次要矛盾，把影响最大的天体先处理，而暂时假设其他天体不存在，从而大幅度简化方程。对地球来说就是先考虑太阳的引力作用，再考虑月球的作用，如果必要再考虑木星等其他天体。并且在解简化版方程时仍然可以使用摄动法，比如说把解看成已知的容易计算的部分加上小参数的幂级数展开，然后根据所需精度抛弃一些高阶项，从而进一步简化计算。

岁差最早是两千多年前古希腊天文学家依巴谷（现在也按英文名字Hipparchus译成“喜帕恰斯”，我不太喜欢这个译法，因为真按英文发音也应该是“喜帕克斯”；其实希腊文发音最接近“依巴霍斯”）发现的。章动则要晚得多，是由哈雷的皇家天文学家职位的继任者布拉德雷（James Bradley）在1748年发现的（他的另一个发现也许更有名，就是光行差 aberration of light ）。

不管是岁差还是章动，其主要的影响都来自太阳和月球，所以不管它们的公式多复杂，其最主要的贡献项都跟日月引力有关，我们不妨叫它“日月项”。具体说来，主要就是因为地球并非完美球体，而是一个在赤道有鼓起的略扁平的椭球体。而日月对地球的赤道鼓起部分的起潮力就产生了日月项。

在前面介绍“潮水法”时我们提到过，起潮力跟引力源的质量成正比，而跟引力源距离的立方成反比。由于岁差与章动的日月项的公式也仍然有点复杂，我不打算把它们写出来，但是我想说的是两个日月项当中都有这么一个参数 ，它的表达式是

也就是说， 等于月日质量比除以月日距离比的立方。 换句话说， 是月日起潮力之比！

而不管是岁差还是章动，公式中剩下的参数都是一些可以通过观测确定的量。比如地球与月球的轨道偏心率，月球升 / 降交点每年相对春分点的移动量，地球的角速度，还有所谓的Delauney常数（差不多等于半个黄白交角的正弦），等等。这样的话如果我们可以精确测定岁差与章动的值（单位一般是每年多少个弧秒），那么就可以代入上面提到的日月项公式中来求出参数。有了，再代入太阳质量和日地距离跟地月距离，就可以求出月球质量。

岁差与章动的量都不算大，但好在两者都是逐年积累的，就是说观察的时间越长得到的值就越精确。比如日月岁差，假设它的周期为26,000年（实际值接近25,800），那么理论上我们可以连着观测26,000年，发现“哟，小熊座*α*又变成北极星了，看来是转一圈了”，然后算一下 弧秒，这个就是每年的岁差了。再比如说章动最主要贡献项有18.6年的周期，那么你只要在天顶附近找一颗亮点的恒星，然后坚持观测个十几二十年，看看它在南北方向上的最大偏移值就好了（布拉德雷就是这么干的。当然他的最初动机是想精确测量光行差。）。

1867年斯通（Edward J. Stone，第二十三任皇家天文学会主席）采用了岁差 *L* = 50.378弧秒，章动 *N* = 9.223 弧秒，算出地月质量比 = 81.36。1895年纽科姆（Simon Newcomb）用自己的观测值算出地月质量比。

(顺便说说 Simon Newcomb。这位老兄是个怪才，只上过短期学校，自学的数学和物理。他写的《政治经济学原理》得到凯恩斯的称赞，数学上他发现了本福特定律，地球科学上他给出了钱德勒摆动的解释，物理上和迈克尔逊合作测量过光速，能说德语、法语、意大利语和瑞典语，写过科普和科幻小说，哈佛请他当天文台台长他不愿意去，因为他说自己更大的兴趣是数学，结果去了Johns Hopkins做数学和天文教授。)。

1. 月球运动理论（Lunar Theory）

月球运动理论是关于月球的运动轨迹的理论。作为太阳以外最显眼的天体，月球从古到今已经被观察了不知多少千年。如果没有太阳和其他行星，月球绕地球的公转轨道应该是个椭圆。但是从古巴比伦时代起人类就已经知道月球的运行轨迹十分复杂。跟匀速圆周运动相比（因为从历法计时角度出发这个假设使用起来最方便），真实的月球运动有着各种不规则的变动，比如延迟，加速，偏心率变化，近地点进动，黄白交点退行等等。找出并且描述这些不规则性，进一步怎么从理论上来解释这些不规则性，从而能比较精确的预测月球的运动轨迹，就是月球运动理论的任务。

月球运行的各种不规则性（和匀速圆周运动相比）每个都有自己的名称（中文往往叫某某“差”，这个“差”其实就是月球的实际位置跟假想的匀速圆周运动位置的角度差）。其中主要的几个有中心差（equation of center），出差（evection，是出“cha”不是出“chai”），二均差（variation），周年差（annual equation），月角差（parallactic inequality），等等。其中中心差是假设月球轨道是圆周而实际是椭圆造成的。剩下的各种”差“基本都是由于太阳和其他行星的摄动引起的。

对我们来说，考虑这些差项的意义在于，如果某些“差”项跟月球质量有关，那么通过高精度测出该差项，就能计算月球质量。

在本节我们要考虑的就是这么两个差项：二均差和月角差（月角差本质上是二均差中的高阶项）。二均差最早是第谷发现的（也有人认为10世纪时波斯天文学家瓦法（Abu Al-Wafa）已经发现了二均差）。它表现为月球接近新月跟满月时会有个加速，而在接近上下弦月时会减速。二均差产生的原因其实非常好理解，因为在上下弦月时日地距离跟日月距离基本相等，两者所受引力加速度也相等；而在其它时候或者日月距离更近，或者日地距离更近，太阳引力的梯度差就会让月球相对地向靠近太阳或者远离太阳的方向加速。换句话说，我们可以把二均差的起因归结于太阳对月球引力 跟太阳对地球的引力 之间的差异 。这种情况跟潮汐的成因其实非常类似，而最早给出理论解释的也正是万有引力的发现者牛顿（即使天才如牛顿，也发现月球运动理论太难。据说他曾经跟哈雷抱怨说月球运动论让他头痛失眠，以至于他再也不想思考相关问题了。）。

而月角差是上述的二均差中，由于日地的有限距离而造成的在新月跟满月之间的区别。什么意思呢？就是假设太阳距离无限远，仍然采用上面太阳对月球引力的记号 ，那么在新月位置的 跟 满月位置的 数值就会相同；但是事实上太阳不是无限远，所以新月时的要比满月时的 大。换句话说前面二均差的加速减速效应在以新月为中点的那半个月要大于以满月为中点的半个月。这个由于日地的有限距离（太阳视差 solar parallax ！）引起的二均差中的不均匀性就叫做 parallactic inequality （就是说是太阳视差引起的不均）。

月角差的最大值约为124.97弧秒。折算成月球的运行时间（为简单起见假设一个朔望月是30天）

就是说4分钟多一点，所以不难测量。而从月角差的成因来看，我们不难理解它跟地月质量比以及日地和地月距离之比有关。具体公式是（用 *P* 表示月角差， 和 分别为地球和月球质量， 和 为地月和日地距离）
历史上天文学家对上面的公式的应用分为两派，一派用其他方法得到地月质量比，然后用它来计算太阳视差；另一派则先算出太阳视差，然后用它来计算地月质量比。

牛顿以前的月球运动“理论”都是从几何角度（比如依巴谷和托勒密的本轮+均轮）出发来试图解释观测结果。从牛顿开始才有以引力论为基础的分析性理论。但是即便有了引力论这个工具，月球运动理论仍然是个极其复杂的理论（比如月球近地点每年有大约40度的进动，9年转一圈。可是我们的牛顿爵士算来算去也只能算出一半来，就是说按照他的计算每年进动只有20度，应该18年才转一圈。这可能是导致他“头痛”的部分原因。）。所以十八世纪对月球理论做出大贡献的五个人中除了克莱罗（Alexis Clairaut）外都是物理和数学巨匠，就是在输入法中打进去就会跳出来那种（这四个人是欧拉，达朗贝尔，拉格朗日和拉普拉斯）。

到18世纪中时月球运动方程中已经有大概25到30个三角函数项。当然这些方程现在已经过时了（不够精确）。到20世纪初时月球运动方程中有1400多项。而现在为了从理论上得出激光测距相配合的精度月球运动方程中有几万项！

1. 行星轨道的摄动

地月系统受到其他行星摄动，反过来地月对金星火星等其它行星的轨道也有摄动。这些行星的偏心率，交点位置，轨道倾角，近日点位置等等都会随时间变动。如果能精确测量这些变动值，就可以反过来求出地月质量比，从而计算月球质量。

最早提出这个“行星摄动法”的是勒维叶（Urbain Le Verrier）。勒维叶认为地月系统对其他行星轨道的摄动虽然不大，但是因为会日积月累，只要观测时间足够长就可以达到很高的精度。勒维叶对他的方法极有信心，以至于他拒绝参与百年难逢的金星凌日观测。勒维叶的方法其实很有道理，但是直到他去世天文学界还是觉得当时的观测结果仍然没有精确到可以用他的“行星摄动法”来计算太阳视差和其他相关天文常数（勒维叶本人在1872年算得的太阳视差为 8.86＂，精确度显然不怎么样）。

说起勒维叶，让他留名青史的当然是预测海王星的存在。这是人类第一次利用牛顿引力理论找到一颗以前根本不知道存在的行星。勒维叶留下的另外一件趣事是对所谓的“祝融星”的预测。而这件事情的起因跟天文爱好者熟知的另外一个天文现象有关，就是水星近日点的进动。

故事开始于1840年，那个时候勒维叶还没有发现海王星。当时的巴黎天文台台长阿拉戈（François Arago）建议勒维叶计算水星的运动轨道。到1843年时勒维叶完成了他的计算。可是这一年的水星凌日观测证明了勒维叶算得的轨道有误差。

勒维叶二话不说回去又埋头苦干了16年！到1859年他终于发表了新的观测和计算结果，这些成果中包含了经年累月的中天观测和多达14次的水星凌日。勒维叶相信这次总不会有问题了！可是现实就是那么残酷，勒维叶的计算仍然跟水星运行的观测结果有细微的出入，这个微小的差别就在于水星近日点进动的数值。这个数值大致是每一百年进动574弧秒，但是牛顿引力理论只能解释其中532弧秒，剩下有大概43弧秒无法解释。

今天我们当然知道这剩下的43弧秒要爱因斯坦的广义相对论才能解释（粗略地说这是因为太阳带动附近时空一起运动造成的）。可是勒维叶早出生了60年，所以广义相对论是用不上了。当时他已经通过计算发现了海王星，于是一个很自然的想法出现了。为什么水星有额外的进动？因为还有一颗未知的行星对它有摄动！这颗行星显然比水星更靠近太阳，它简直就是在太阳的火焰里烧烤着。于是勒维叶用罗马神话中的火神Vulcan来命名它，中文一般译成“祝融星”。

勒维叶的名声使得许多观测天文学家和天文爱好者纷纷试图发现这颗比水星更靠近太阳的内行星。由于“祝融星”太靠近太阳，观测只能靠它的凌日或者在日食期间进行。从1859年开始，各种“祝融星凌日”的观测结果寄到勒维叶手中，而勒维叶选取相对比较靠谱的结果来不断修正这颗假想中的行星的轨道。其中两位美国天文学家沃森（James Watson）和斯威夫特（Lewis Swift）在1878年日全食期间的观测尤其令人兴奋。因为他们在不同地点发现的“新行星”的位置和亮度都很接近，而且两位都是富有经验的天文学家（沃森发现过超过20颗小行星；斯威夫特则发现过许多彗星，他在1862年与塔特尔 (Horace Parnell Tuttle) 几乎同时发现的斯威夫特-塔特尔彗星就是著名的英仙座流星雨的母体）。当然这些结果最终都被证明多半是误认的恒星或者太阳黑子之类。

尽管如此，直到1908年的日全食天文学家仍没有放弃对它的搜索。真正的解决仍然要等到1919年广义相对论被爱丁顿的观测证实之后。在那之后天文学界意识到水星轨道内再存在一颗大型天体基本不可能，证据仍然是水星轨道的运动，只不过这次是反过来用了，因为水星近日点进动已经被广义相对论完美解释，而如果有其他天体必然会对水星轨道有摄动，就不符合观测值了。